253. Finsler ノ空間ニ於ケル運動方程式

穂刈四三二（北大）

L. Berwald ノ研究シタ Finsler ノ空間（Math. Zeit., 25, 1926）ニ於ケル Bewegung ヲ規定スル Killing ノ方程式（ノ拡張）トシテ M. S. Knebelman ガ Amer. Jour. of Math., 51, 1929 デ

$$g_{ih}\xi^h{}_{,j}+g_{hj}\xi^h{}_{,i}+\xi^h g_{ij,h}+\xi^h{}_{,m}p^m g_{ijh}=0$$

ヲ発表シテヰル。元来 L. Berwald ノ方法ハ ausgezeichnetes Linienelement（a. L. ト略記スル）p^i ニツイテ一次ノ positiv-homogene Funktion $F(x,p)$ ニ Variationsrechnung ヲ施シテ metrisch ナ Finsler ノ空間ヲ建設シタモノデアル。

1°）コノ方法ノ短所ハ Vektor ノ Parallelverschiebung ニ対シテソノ長サガ一般ニハ変化スル．コノ様ナ空間デ Bewegung ヲ論ズルコトハ余リニモ突飛スギハシナイデシヨウカ。

2°）今一ツ注意シナケレバナラナイコトハ Riemann 空間デハ Element ハ Koord. x^i ノミヲ有スルガ

Finsler ノ空間デハ x^i ノ外ニソノ Punkt ニ adjungieren サレタ a. L. p^i が存在スル。即チ (x, p) ノ組が Element デアル。従ツテ x^i が固定サレテキルトキ；$p_1 \neq p_2$ デアレバ Element トシテハ $(x, p_1) \neq (x, p_2)$ デアル。Knebelman ハ x^i ノミノ infinitesimale Transformation

(1) $\bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t$

ノモトデ Bewegung ヲ論ジテキルが，上ニ述ベタ意味カラスレバ x ト p トノ infinit. Transf. ニ對シテ論ズベキデハナイデセウカ。

コノ 1°) ニ對シテハ E. Cartan ノ建設シタ metrisch ナ空間ヲ用フレバヨイ。2°) ニ對シテハコヽデ x ト p トノ infinit. Transf. ニ對シテ Bewegung ヲ考ヘテ見ヤウ。

中心 (x^i) ニ於ケル p^i ノ infinit. Transf. ハ

(2) $\overset{*}{p}{}^i = p^i + C^i_j(x)\delta t$

デ與ヘラレル。コノ $\overset{*}{p}$ ヲ x カラ $\bar{x}$ ニ移シテ $\bar{p}^i$ が得ラレタトスレバ (1) ト (2) トカラ

(3) $\bar{p}^i = p^i + \left(C^i_j + \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) p^j \delta t$

コノ (1) ト (3) ヲ組合ハセタ Transf. ハ infinitesimal ニハ Gruppe ノ性質ヲ有スルコトハ直グワカル。(1) ト (3) トノモトデハ二次以上ノ項ヲステヽ

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x},\bar{p}) = g_{ij}(x,p) + \left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k}\left(C^k_l + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}\right)p^l\right\}\delta t$$

$$d\bar{x}^i = dx^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j \delta t$$

デアルカラ

$$\bar{g}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j = g_{ij} dx^i dx^j + \left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k}\left(C^k_l + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}\right)p^l \right.$$

$$\left. + g_{hj}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^l} + g_{hi}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^j}\right\} dx^i dx^j \delta t$$

従ッテ第一ニ長サガ *invariant* デアルタメニハ

$$(4) \quad g_{hi}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^j} + g_{hj}\frac{\partial \xi^h}{\partial x^i} + \xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + 2C_{ijk}\left(C^k_l + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}\right)p^l = 0$$

但シコヽニ p^i ハ *Einheit* ニトッテオク。従ッテ $2C_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial p^k}$.

ξ^k ハ x ノミノ函数デアルカラ

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = \xi^k_{/i} - \xi^h \overset{*}{\Gamma}{}^k_{hi}$$

コレヲ (4) ニ代入シテ整頓スレバ

$$(5) \quad \xi_{i/j} + \xi_{j/i} + 2C_{ijr}\left(\xi^r_{/0} + C^r_l p^l\right) = 0$$

然ルニ p^i ノミノ *Transf.* ニ對シテモ矢張リ長サガ *invariant* デナケレバナラナイカラ (2) カラ

$$(6) \quad \boxed{C_{ijr} C^r_l p^l = 0}$$

従ッテ (5) カラ

$$(7) \quad \boxed{\xi_{i/j}+\xi_{j/i}+2C_{ijr}\xi^r{}_{/0}=0}$$

コレラノ條件ノモトデ *Winkel* モ亦 *invariant* デアルコトガ容易ニワカルカラ次ノ結果ガ得ラレル。

<u>*infinit. Transf.* (1), (2), (3) ガ *Bewegung* デアルタメノ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ ξ^i 及ビ C^i_j ガ夫々 (7) 及ビ (6) ヲ満足スルコトデアル。</u>

コノ (6) ト (7) ヲ用フレバ *Riemann* 幾何學ニ於ケル *Bewegung* ニ關スル定理ガ容易ニ *Finsler* ノ場合ニ拡張サレル。特別ノ場合トシテ

$\boxed{\text{系 1}}$ x ノ ξ ノ *infinit. Transf.* ニ對スル運動方程式ハ(7)デアル。

$\boxed{\text{系 2}}$ p ノ ξ ノ *infinit. Transf.* ニ對スル運動方程式ハ(6)デアル。

Riemann ノ場合ニハ $C_{ijk}\equiv 0$ デアルカラ (6) 式ハ恒等的ニ満足サレ、(7) 式ハ

$$\xi_{i/j}+\xi_{j/i}=0$$

トナッテ所謂 *Killing* ノ方程式トナル。又 C^i_j ガ

$$(8) \quad C^i_j=\rho(x)\,\delta^i_j$$

ナル *Form* ヲトルトキハ (6)式ハ C_{ijk} ノ性質カラ恒等的ニ成立スル。(8) ノ幾何学的意義ハ中心 x ニ於ケル *a. L.* ヲ廻轉セズニ，ソノ長サノミヲ変ズルコトデアル。従ッテ (6)

ノ恒等的ニ成立スルコトハ當然ノコトデアル。

Finsler ノ空間ノ一般化サレタ河口空間ニ對シテモ，同様ナ結果ガ得ラレル。コレハ後日述ベサセテモラウコトニスル。